DS de mathématiques n°4

Intégrales, ED, nombres réels, suites –

Corrigé

Noté sur ... pts ±5 pts pour le soin et la clarté,
puis la note est ramené sur 20 en multipliant par ... .

1 Pour s'échauffer

Les questions principales de cet exercice (i.e. ***1)****,* ***2)****, etc.) sont indépendantes.*

1) a) Mettre $1+i$ sous forme exponentielle puis résoudre l'équation $z^2 = 1+i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, en exprimant les solutions sous forme exponentielle.

$$\begin{aligned} 1+i &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} \end{aligned}$$

Or, les solutions de $z^2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ sont $\sqrt{2}^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $-\sqrt{2}^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{8}} = \sqrt{2}^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}e^{i\pi}$. On en déduit que

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}, \sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{9\pi}{8}}\right\}}$$

b) Résoudre à nouveau l'équation $z^2 = 1+i$ par une autre méthode, qui permet d'exprimer les solutions sous forme algébrique.

On pose $z = a+ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $z^2 = 1+i$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z^2) = 1 \\ \mathrm{Im}(z^2) = 1 \\ |z|^2 = |1+i| \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = 1 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^2 = 1+\sqrt{2} \\ 2b^2 = \sqrt{2}-1 \\ 2ab = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2} \\ b^2 = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

On en déduit que $a = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ ou $a = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ et $b = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ ou $b = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$. Or, comme $ab > 0$, on sait que a et b ont même signe. Dès lors :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \quad , \quad -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right\}}$$

c) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

On pose $z_0 = \sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}$. On a $\mathrm{Re}\,z_0 = \sqrt{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{8}$. Il reste à calculer $\mathrm{Re}\,z_0$. Or, z_0 est une solution de $z^2 = 1+i$ par la question a). Par la question b), on a donc $\mathrm{Re}\,z_0 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ ou $\mathrm{Re}\,z_0 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$. Or, la fonction cosinus est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$. Ainsi, on a nécessairement $\mathrm{Re}\,z_0 > 0$ donc $\sqrt{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ de sorte que

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1+\sqrt{2}}{2}} \\ &= \boxed{\sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}} \end{aligned}$$

2) Déterminer les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui vérifient :

$$y'' - 4y' + 4y = 1 + e^{2i\,x}$$

— On résout E_H : $y'' - 4y' + 4y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = 0$, i.e. $(r-2)^2 = 0$. Il y a donc une racine double qui vaut 2. (Comme $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), les solutions de E_H sont les fonctions :

$$y_H(x) = (A + Bx)e^{2x} \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{C}$$

— On cherche une solution particulière de E : $y'' - 4y' + 4y = 1 + e^{2i\,x}$. On pose

$$E_1 : \quad y'' - 4y' + 4y = 1$$

$$E_2 : \quad y'' - 4y' + 4y = e^{2i\,x}$$

— La fonction $y_{p1}(x) = \dfrac{1}{4}$ est solution particulière évidente de E_1.

— On pose $y_{p2}(x) = Ce^{2i\,x}$ avec $C \in \mathbb{C}$. Alors

$$\begin{cases} y'_{p2}(x) = C(2i\,)e^{2i\,x} \\ y''_{p2}(x) = -4Ce^{2i\,x} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} & y''_{p2} - 4y'_{p2} + 4y_{p2} = e^{2i\,x} \\ \iff & -4Ce^{2i\,x} - 8i\,Ce^{2i\,x} + 4Ce^{2i\,x} = e^{2i\,x} \\ \iff & -8i\,C = 1 \\ \iff & C = \frac{-1}{8i} = \frac{1}{8}i \end{aligned}$$

de sorte que $y_{p2}(x) = \dfrac{1}{8}i\,e^{2i\,x}$.

Finalement, une solution particulière de E est donnée par

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}i\,e^{2i\,x}$$

Les solutions de E sont donc les fonctions :

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}i\,e^{2i\,x} + (A + Bx)e^{2x} \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{C}}$$

3) Soit $a > 0$. On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général

$$u_n = (1 + a) \times (1 + a^2) \times \ldots \times (1 + a^n)$$

a) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque que $u_n > 0$ en tant que produit de termes strictement positifs. Or,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + a^{n+1}$$

Comme $a > 0$, on a $a^n > 0$ de sorte que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Par suite, (u_n) est strictement croissante.

b) Montrer que si $a \geq 1$, alors $u_n \geq 2^n$. En déduire la limite de (u_n).

On suppose $a \geq 1$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $a^k \geq 1$, de sorte que

$$1 + a^k \geq 2$$

En faisant le produit terme à terme de ces inégalités pour k allant de 1 à n (ce qui est licite car tous les termes sont positifs), on en déduit que

$$(1 + a^1) \times \ldots \times (1 + a^n) \geq \underbrace{2 \times \ldots \times 2}_{n \text{ fois}}$$

donc $u_n \geq 2^n$. Or, $2^n \to +\infty$. Par comparaison, $u_n \to +\infty$.

c) Montrer que pour tout réel x, on a $1 + x \leq e^x$.

On pose $f : x \mapsto e^x - x - 1$. Il suffit de montrer que f est positive sur $\mathbb{R}$. f est dérivable comme différence de telles fonctions et pour tout réel x, $f'(x) = e^x - 1$. Ainsi,

$$f'(x) > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0 \qquad \text{par stricte croissance de } \ln$$

On obtient donc le tableau suivant :

x	$-\infty$ $\quad$ 0	0 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow_0$	$_0\nearrow$

(Les limites en $\pm\infty$ sont facultatives, on ne s'en servira pas ici). On constate que f est positive d'après le tableau de variations. Donc $\boxed{e^x \geq x + 1}$

d) On suppose $0 < a < 1$. En utilisant la question précédente, montrer que la suite (u_n) converge.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a par ce qui précède, $1 + a^k \leq e^{a^k}$. En faisant le produit terme à terme de ces inégalités pour k allant de 1 à n, on obtient

$$\begin{aligned} &(1+a^1) \times \ldots \times (1+a^n) \leq e^{a^1} \times \ldots \times e^{a^n} \\ \iff\ & u_n \leq e^{a^1+\ldots+a^n} \\ \iff\ & u_n \leq e^{\sum_{k=1}^n a^k} \end{aligned}$$

Or, comme $a \neq 1$

$$\sum_{k=1}^n a^k = a \times \frac{1-a^n}{1-a}$$

et comme $0 < a < 1$, on a $a^n < a$, de sorte que $\frac{1-a^n}{1-a} \leq \frac{1-a}{1-a} = 1$. Par suite, $\sum_{k=1}^n a^k \leq a$, et par croissance de l'exponentielle,

$$u_n \leq e^a$$

On en conclut que (u_n) est majorée par e^a. Comme cette suite est croissante par la question a), elle est convergente.

2 Une équation d'ordre 2 à coefficients non constants

On cherche les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(E) : \quad (x^2+1)y'' - 2y = 0$$

1) **a)** Déterminer une primitive de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(t) = \frac{t^2}{(1+t^2)^2}$$

On pourra remarquer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\frac{t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{t}{2} \times \frac{2t}{(1+t^2)^2}$.

$$\begin{aligned} \int^x f(t)dt &= \int^x \frac{t}{2} \times \frac{2t}{(1+t^2)^2} dt \\ &= \left[\frac{t}{2} \times \left(-\frac{1}{1+t^2}\right)\right]^x - \int^x \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{1+t^2}\right) dt \\ &= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int^x \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \boxed{-\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x} \end{aligned}$$

b) En déduire une primitive de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(t) = \frac{1}{(1+t^2)^2}$$

$$\begin{aligned} \int^x g(t)dt &= \int^x \frac{1}{(1+t^2)^2} dt \\ &= \int^x \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^2} dt \\ &= \int^x \frac{1}{1+t^2} dt - \int^x f(t)dt \\ &= \arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\arctan x \\ &= \boxed{\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x} \end{aligned}$$

2) Déterminer *une* solution de (E) sous la forme d'un polynôme de degré 2 (non nul), que l'on notera y_0.

On pose $y_0(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, et $a \neq 0$ pour que y_0 soit bien de degré 2.

$$\begin{cases} y_0'(x) = 2ax + b \\ y_0''(x) = 2a \end{cases}$$

De sorte que

$$\begin{aligned}
&(x^2+1)y''-2y=0\\
\iff\ &(x^2+1)\times 2a-2(ax^2+bx+c)=0\\
\iff\ &(2a-2a)x^2+(-2b)x+(2a-2c)=0\\
\iff\ &-bx+(a-c)=0\\
\iff\ &\begin{cases}-b=0\\ a-c=0\end{cases}\quad \begin{cases}b=0\\ a=c\end{cases}
\end{aligned}$$

On trouve alors que nécessairement $y_0(x)=ax^2+a$. On peut par exemple prendre $a=1$, de sorte que $\boxed{y_0(x)=x^2+1}$ convient.

3) Soit $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On pose $Y:x\mapsto\dfrac{y(x)}{y_0(x)}$. En écrivant $y=y_0Y$ et en posant $z=Y'$, montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle

$$(E'):\quad z'+\frac{4x}{x^2+1}z=0$$

On a

$$\begin{aligned}
&(x^2+1)y''-2y=0\\
\iff\ &(x^2+1)(y_0Y)''-2y_0Y=0\\
\iff\ &(x^2+1)\left[y_0'Y+y_0Y'\right]'-2y_0Y=0\\
\iff\ &(x^2+1)\left(y_0''Y+2y_0'Y'+y_0Y''\right)-2y_0Y=0\\
\iff\ &(x^2+1)\left(2Y+2(2x)Y'+(x^2+1)Y''\right)-2(x^2+1)Y=0\\
\iff\ &\cancel{2(x^2+1)Y}+4x(x^2+1)Y'+(x^2+1)^2Y''-\cancel{2(x^2+1)Y}=0\\
\iff\ &4x(x^2+1)z+(x^2+1)^2z'=0\\
\iff\ &z'+\frac{4x}{x^2+1}z=0
\end{aligned}$$

4) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Résolvons (E'). L'intervale d'étude est $\mathbb{R}$. Une primitive de $x\mapsto\dfrac{4x}{x^2+1}$ est $x\mapsto 2\ln(x^2+1)$. Les solutions de (E') sont donc les fonctions de la forme

$$z(x)=Ce^{-2\ln(x^2+1)}=\frac{C}{(x^2+1)^2}\qquad\text{avec } C\in\mathbb{R}$$

Ainsi, Y est une primitive de z, donc on en déduit par la question 1)b) que

$$Y(x)=\frac{Cx}{2(1+x^2)}+\frac{C}{2}\arctan x+D\qquad\text{avec } C,D\in\mathbb{R}$$

Enfin, par la question précédente les solutions de (E) sont les fonctions de la forme y_0Y, i.e.

$$\begin{aligned}
y(x)&=(x^2+1)\times\left[\frac{Cx}{2(1+x^2)}+\frac{C}{2}\arctan x+D\right]\\
&=\boxed{\frac{Cx}{2}+\frac{C}{2}(x^2+1)\arctan x+D(x^2+1)\qquad\text{avec } C,D\in\mathbb{R}}
\end{aligned}$$

On notera qu'en posant $A=\dfrac{C}{2}$, on peut encore simplifier cela (lorsque C parcourt $\mathbb{R}$, A parcourt $\mathbb{R}$ également et vice versa) :

$$y(x)=Ax+A(x^2+1)\arctan x+D(x^2+1)\qquad\text{avec } A,D\in\mathbb{R}$$

3 Suites Djadjacentes

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $c_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $c_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1+c_n}{2}}$.

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $c_n=\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

Démontrons ce résultat par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.

— Si $n=0$, alors

$$c_0=0=\cos\frac{\pi}{2}=\cos\frac{\pi}{2^{0+1}}$$

donc le résultat est vrai au rang 0.

— Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $c_n=\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$. Montrons que cette propriété est vraie au rang $n+1$. Par définition de (c_n),

$$c_{n+1}=\sqrt{\frac{1+c_n}{2}}=\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2}}=\sqrt{\cos^2\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}=\left|\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\right|$$

Or, $\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right)\geq 0$. Ainsi, $c_{n+1}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right)$. Le résultat est donc vrai au rang $n+1$.

Ainsi, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On considère les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par les relations suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_0 = 2 \qquad S_n = \frac{S_{n-1}}{c_n} \qquad \text{et} \qquad T_n = \frac{S_n}{c_n}$$

2) Montrer que (S_n) et (T_n) sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la question 1,

$$c_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

et comme $\frac{\pi}{2^{n+1}} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $c_n \in]0,1[$. En particulier, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\geq 1}$ sont bien définies. Comme $S_0 > 0$ et $c_n > 0$, on montre par récurrence immédiate que $S_n > 0$, et de même que $T_n > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{S_n}{S_{n-1}} = \frac{1}{c_n} \geq 1 \qquad \text{car } c_n \in]0,1[$$

donc (S_n) est croissante. Par ailleurs,

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{\frac{S_{n+1}}{c_{n+1}}}{\frac{S_n}{c_n}} = \frac{S_{n+1}}{S_n} \times \frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{1}{c_{n+1}} \times \frac{c_n}{c_{n+1}}$$

Or, $c_{n+1}^2 = \frac{1+c_n}{2}$, donc

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{c_n}{\frac{1+c_n}{2}}$$

Comme $c_n < 1$, on a $\frac{1+c_n}{2} > c_n$, si bien que $\frac{T_{n+1}}{T_n} < 1$. D'où $(T_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

Enfin, montrons que $S_n - T_n \to 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n - T_n = T_n(c_n - 1)$$

D'une part, comme $\frac{\pi}{2^{n+1}} \to 0$, on a par continuité de cos que $c_n \to 1$, si bien que $c_n - 1 \to 0$. D'autre part, (T_n) est décroissante et positive donc $0 \leq T_n \leq T_1$: la suite (T_n) est bornée. Ainsi, $T_n(c_n-1) \to 0$. On a donc bien montré que les suites (S_n) et (T_n) sont adjacentes.

On en déduit qu'elles convergent vers la même limite.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

— Pour $n = 0$, c'est clair car

$$\begin{cases} S_0 = 2 \\ 2^{0+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{0+1}}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} = 2 \end{cases}$$

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose le résultat vrai au rang n. Montrons-le au rang $n+1$. Par définition de (S_n),

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{S_n}{c_{n+1}} \\ &= \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} \times 2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) && \text{par la question 1 et l'hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} \times 2^{n+1}\sin\left(2\times\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \\ &= \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} \times 2^{n+1} \times 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \\ &= 2^{n+2}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \end{aligned}$$

Donc le résultat est vrai au rang $n+1$.

Finalement, on a $S_n = 2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) En utilisant le fait (admis) que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, en déduire la limite de (S_n).

Comme $\frac{\pi}{2^{n+2}} \to 0$ et $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, on a par composition de limites :

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{\frac{\pi}{2^{n+2}}} \to 1$$

ce qui équivaut à

$$\frac{1}{\pi}2^{n+2}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \to 1$$

ou encore

$$\frac{1}{\pi}S_n \to 1$$

Ainsi, $\pi \times \frac{1}{\pi}S_n \to \pi$, ou encore $\boxed{S_n \to \pi}$.

4 Densité de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans $\mathbb{R}$

On note D l'ensemble des nombres réels de la forme $p+q\sqrt{2}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$ (cet ensemble se note aussi $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ mais on le notera D dorénavant). L'objectif de cet exercice est de montrer que D est dense dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que pour tous $x, y \in D$, les nombres $x+y$, $x-y$ et xy sont éléments de D.

Soit $x, y \in D$. Alors il existe $p_1, q_1, p_2, q_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $x = p_1 + q_1\sqrt{2}$ et $y = p_2 + q_2\sqrt{2}$. Dans ce cas,

$$x + y = \underbrace{(p_1 + p_2)}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{(q_1 + q_2)}_{\in\mathbb{Z}}\sqrt{2}$$

donc $x + y \in D$. On montre de même que $x - y \in D$. Enfin,

$$xy = \underbrace{p_1p_2 + 2q_1q_2}_{\in\mathbb{Z}} + \sqrt{2} \times \underbrace{(p_1q_2 + p_2q_1)}_{\in\mathbb{Z}}$$

donc $xy \in D$.

2) Soit $u = \sqrt{2} - 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u^n \in D$.

- Si $n = 0$, alors $u^n = 1 = 1 + 0\sqrt{2} \in D$
- Si $n \geq 1$, alors on remarque que $u \in D$ et comme le produit d'éléments de D est encore dans D, alors $u^n = \underbrace{u \times \ldots \times u}_{n \text{ fois}}$ est dans D.

3) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u^N < b - a$.

Montrons que $0 < u < 1$. Le fait que $u > 0$ est évident. De plus, par stricte croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$, on a :

$$u < 1 \iff \sqrt{2} < 2 \iff \sqrt{2} < \sqrt{4}$$

D'où $0 < u < 1$. En particulier, $u^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, par définition de la limite, en prenant $\varepsilon = b - a > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u^N - 0| < \varepsilon$. Comme $u > 0$, on a aussi $u^N > 0$, de sorte que l'on a bien $0 < u^N = |u^N| < b - a$.

4) Montrer que l'ensemble $X = \left\{k \in \mathbb{Z} \;\middle|\; a < ku^N\right\}$ admet un plus petit élément, qu'on notera m.

X est une partie de $\mathbb{Z}$. Il suffit donc de montrer que X est non vide et minoré pour conclure.

- Pour tout $k \in X$, on a $ku^N > a$ et donc, comme $u^N > 0$, on a $k > \dfrac{a}{u^N}$. Ainsi, X est minoré par $\dfrac{a}{u^N}$.
- Montrons que X est non vide. On remarque que $k = \left\lfloor \dfrac{a}{u^N} \right\rfloor + 1$ est bien un entier et vérifie bien $k > \dfrac{a}{u^N}$, ce qui équivaut à $ku^N > a$. Donc $k \in X$, qui est ainsi non vide.

Finalement, X possède bien un plus petit élément.

5) Montrer que $a < mu^N < b$.

Par ce qui précède, $m \in X$, de sorte que $a < mu^N$. Supposons par l'absurde que $mu^N \geq b$. Alors on a

$$\begin{cases} b \leq mu^N \\ b - a > u^N \end{cases} \quad \begin{cases} b \leq mu^N \\ a - b < -u^N \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad a < (m-1)u^N$$

par somme. Or, cela implique que $m - 1 \in X$. Contradiction car m est le plus petit élément de X. Finalement, on a bien $mu^N < b$. D'où le résultat.

6) Conclure.

Comme $u^N \in D$ et que D est stable par somme ou différence, on a $mu^N \in D$. Ainsi, on a montré que tout intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ contient au moins un élément de D. On en déduit que D est dense dans $\mathbb{R}$.

5 Une primitive prohibitive

Soit $f : x \mapsto \ln x$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f^n la fonction $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$, avec la convention $f^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}$. Déterminer une primitive de la fonction

$$g : x \mapsto \frac{1}{f^0(x) f^1(x) \ldots f^n(x)}$$

Montrons par récurrence sur n que $(f^{n+1})' = \dfrac{1}{f^0 \times f^1 \times \ldots \times f^n}$. (On rappelle que $f^{n+1} = \underbrace{\ln \circ \ln \circ \ldots \circ \ln}_{n+1 \text{ fois}}$).

- Pour $n = 0$, on a pour tout $x > 0$, $g(x) = \dfrac{1}{f^0(x)} = \dfrac{1}{x}$ et $f^1(x) =$

$\ln x$, le résultat est évident.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $(f^{n+1})' = \dfrac{1}{f^0 \times f^1 \times \ldots \times f^n}$. Montrons que $(f^{n+2})' = \dfrac{1}{f^0 \times f^1 \times \ldots \times f^n \times f^{n+1}}$. La fonction f^{n+2} est dérivable par composée de telles fonctions et

$$\begin{aligned}(f^{n+2})' &= (f \circ f^{n+1})' \\ &= (f' \circ f^{n+1}) \times (f^{n+1})'\end{aligned}$$

Or, f' est la fonction inverse. Si on applique en plus l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned}(f^{n+2})' &= (f \circ f^{n+1})' \\ &= \frac{1}{f^{n+1}} \times \frac{1}{f^0 \times f^1 \times \ldots \times f^n} \\ &= \frac{1}{f^0 \times f^1 \times \ldots \times f^n \times f^{n+1}}\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Finalement, on a bien montré que $(f^{n+1})' = \dfrac{1}{f^0 \times f^1 \times \ldots \times f^n}$. Ainsi, la primitive recherchée est $\boxed{f^{n+1}}$.